Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

Turrialba, Costa Rica

# Segundo dia

30 de setembro de 2025

**Problema 4.** Encontre infinitas funções diferenciáveis $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que $f(20, 25) = 2025$ e, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, valha

$$(f(x, y))^3 + (f_x(x, y))^3 + (f_y(x, y))^3 = 3f(x, y)f_x(x, y)f_y(x, y).$$

**Nota:** $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.

**Problema 5.** Seja $n$ um inteiro positivo. No espaço das matrizes $n \times n$ com entradas reais, considere o subconjunto $M_n$ das matrizes com entradas no conjunto $\{-1, 1\}$. Demonstre que no mínimo 25% das matrizes em $M_n$ são invertíveis.

**Problema 6.** Demonstre que existem números reais positivos $C$ e $t$, com $t > 1$, tais que se $n \geq 2$ e $S$ é um conjunto de $2n$ pontos do plano em posição geral, com $n$ pontos vermelhos e $n$ pontos azuis, então há pelo menos $Cn^t$ triângulos com dois vértices vermelhos e um vértice azul cujo interior não contém nenhum ponto de $S$.

**Nota:** Um conjunto de pontos é dito em posição geral se não há três pontos colineares.

**Cada problema vale 10 pontos**
**Tempo máximo: 4h 30m.**