Competencia Iberoamericana Interuniversitaria de Matemáticas

Turrialba, Costa Rica

Segundo día

30 de septiembre de 2025

Problema 4. Determine infinitas funciones diferenciables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que $f(20, 25) = 2025$ y para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$(f(x,y))^3 + (f_x(x,y))^3 + (f_y(x,y))^3 = 3f(x,y)f_x(x,y)f_y(x,y).$$

Nota: $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Problema 5. Sea n un entero positivo. En el espacio de matrices $n \times n$ con entradas reales, considere el subconjunto M_n de las matrices con entradas en el conjunto $\{-1, 1\}$. Demuestre que al menos el $25\,\%$ de las matrices en M_n es invertible.

Problema 6. Demuestre que existen números reales positivos C y t, con $t > 1$, tales que si $n \geq 2$ y S es un conjunto de $2n$ puntos del plano en posición general, con n puntos rojos y n puntos azules, entonces hay al menos Cn^t triángulos con dos vértices rojos y un vértice azul cuyo interior no contiene ningún punto de S.

Nota: Un conjunto de puntos en el plano se dice en posición general si no hay tres de estos puntos colineales.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.
Tiempo máximo: 4h 30m.