

Primeiro dia

29 de setembro de 2025

Problema 1. Considere dois conjuntos $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^2$ que satisfazem as seguintes três condições:

1. $(n, 1) \in \mathcal{P}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. Se $(a, b) \in \mathcal{P}$, então $(a, 0) \in \mathcal{Q}$.
3. Se um trapézio tem dois lados paralelos ao eixo- Y , com dois vértices em $\mathcal{P}$ e os outros dois vértices em $\mathcal{Q}$, então o ponto de interseção de suas diagonais também está em $\mathcal{P}$.

Demonstre que $\mathbb{Q} \times \{0\} \subseteq \mathcal{Q}$.

Problema 2. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x + y - x^3, y - y^3)$. Defina $F^1 = F$ e $F^{n+1} = F \circ F^n$ para $n \geq 1$.

- a) Demonstre que se $|x| \leq 1/2$ e $|y| \leq 1/2$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x, y) = (0, 0)$.
- b) Demonstre que, para quaisquer $K > 0$, $\varepsilon > 0$, existem um inteiro positivo n e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ com $0 < |(x_0, y_0)| < \varepsilon$ tais que $|F^n(x_0, y_0)| > K|(x_0, y_0)|$.

Problema 3. Seja $\mathcal{E}$ uma elipse com semieixos $a > b$ e seja B uma extremidade do eixo menor da elipse. Para todo ponto P da elipse, defina $m(P)$ como a maior distância de P a qualquer outro ponto da elipse; isto é, defina a função

$$m(P) = \max_{Q \in \mathcal{E}} PQ,$$

onde PQ denota a distância de P a Q .

- a) Demonstre que $m(B) \leq m(P)$ para todo ponto P da elipse.
- b) Determine o valor de $m(B)$ em função de a e b .

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.